1. 奇妙なアトラクターの特異点のスペクトルf(d)(九州大学大学院理学研究科物理学専攻,修士論文題目・アブストラクト(1986年度),その2)

秦, 浩起

∘ 九州大学大学院理学研究科物理学専攻

1. 奇妙なアトラクターの特異点のスペクトル $f(\alpha)$

秦　浩起

今や，科学はカオス（混沌）をも，その範中に収めようとしている。科学におけるカオスとは何か。それは「決定論的法則に従うシステムが示す，ランダムな運動」である。

最も簡単な例を一つあげよう。時刻 $t=n$ での量 x_n が決まると， $t=n+1$ での量 x_{n+1} が決まるというシステム（１次元写像）を考える。（この物理的意味は今は問わないことにする。） これを

$$x_{n+1}=f(x_n) \tag{1}$$

と書き，関数 $f(x)$ として次のようなものをとる。

$$f(x)=\begin{cases}\beta x & 0\leq x<\dfrac{1}{2}\\[2ex] \beta(1-x) & \dfrac{1}{2}\leq x<1\end{cases}\tag{2}$$

$0\leq\beta\leq 2$ (図1を参照)

$\beta>1$ の時，x_i ($i=0, 1, 2, \cdots$) は，図2 (a) のような極めて複雑な挙動を示す。（これは，まったく非周期的である。）

しかも，このシステムでは決定論的予測は不可能である。なぜなら，初期値 x_0 が ε の誤差を含んでいたとすると，それは1ステップ毎に β 倍に拡大し，時核 $t=n$ では

$$\varepsilon\cdot\beta^n\tag{3}$$

になるからである。図2 (b) は，(a) の初期値に対して，$\varepsilon=10^{-3}$ だけずれた初期値からの挙動を示したもので，わずか $n\cong 10$ でその差が有意なものになっていることがわかる。このように誤差が指数関数的に増大していくことを「初期値に対する鋭敏な依存性」と呼ぶ。ここに，Laplace の悪魔は姿を消し，カオスが出現するのである。

実際の物理的システムにおけるこのような性格は，流体乱流がよく知られている。流体は Navier-Stokes eq.

$$\frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial t}=-\boldsymbol{u}\cdot\nabla\boldsymbol{u}+\nu\nabla^2\boldsymbol{u}-\rho^{-1}\nabla P\tag{4}$$

に従っていることは，わかっていても非常にランダムな振舞いをして予測不能である。

かの Landau は，乱流を多くの独立な振動の重ね合わせ，すなわち位相空間での高次元トーラス上の運動と主張した(1944)。　この描像の下では，乱流は振動数 ω_1 を持つ周期運動から制御パラメター (例えば Raynolds 数) の変化に伴って，Hopf 分岐により振動数 ω_2 が付け加わり準周期運動に，そしてさらに ω_3，ω_4，ω_5，$\cdots$ と順次，高次のトーラス上の準周期運動へと分岐しながら，十分複雑な運動になっていくことになる。

これを Landau-Hopf の描像と呼ぶが，1971年にRuelle と Tarkensによって3次元以上のトーラス上の運動は，一般に小さな摂動によって崩れてカオスに至ることが示された。これは，Fenstermacher らの Tayler-Couette 流の実験によって確められた。

一方，数理生物学者May (1976) は昆虫の個体数の変動を表現する (1)，(2) 式に類似の1次元写像 (logistic 写像と呼ぶ)

$$x_{n+1} = a x_n (1 - x_n) \tag{5}$$

に対して，パラメター変化とともに周期が２倍，４倍，８倍……となって，ついにはカオス状態へ至る過程があることを発見していた。

そして驚くべきことに，このような現象が流体乱流をはじめとする非線形散逸力学形一般において，定性的かつ定量的に成り立つことがわかった。（ Feigenbaum 1978 ） これは実験でも確められ，それ以後，低次元力学系のカオス発生の他のタイプ（ 間欠的カオス，不整合カオス ）も理論的・実験的に研究されるようになった。（ 詳説は後述する。 ）

現在では，力学系のカオスは流体乱流，化学反応，レーザー，電気回路，荷電密度波，マグノンから，神経，にわとりの心臓に至るまで，広い対象で確認されている。

この修論では，そのカオスの奇妙なアトラクターの構造に着目する。その準備として，この章ではカオスの幾つかの概念を説明しよう。§２では，散逸力学形のアトラクターについて，§３では，カオスの研究に用いられる次元の縮約について，§４では，カオスの発生過程について述べることにする。

2. 間欠的カオスの臨界点近くでの非線型応答

堀　田　武　彦

我々は，自然現象のモデルとして，微分方程式を採用している。しかしながら，多くの場合には，微分方程式の解を書き下すことは，非常に困難である。また，単に困難であるだけでなく，その解は，不規則（ 非周期的 ）な振舞を示すことが，1978年の Feigenbaum の普遍性の追求の研究と，また，それに対する，流体系での実験的検証の登場（1980年）以来，物理学者の間で認識されるようになった。

このような，決定論的発展法則に従いながら，不規則な振舞を示す場合，この不規則性は，カオスと呼ばれている。ここで，不規則と述べる意味は，非周期的であるということの他に，次のことを意味する。決定論であるから，初期の状態が定まれば，その後の振舞は，予言出来る筈である。しかしながら，ほんの少し異なった初期状態をとった場合に，有限の時間の後にその違いが大きくなってしまうような状況では，初期の状態を，実際に確定するためには，無限の精度で行なわなければ，振舞を予言することは出来ない。したがって，実際には予言出来